Introduction à l'Optimisation : **Problème de Coloration**

Dominique Quadri

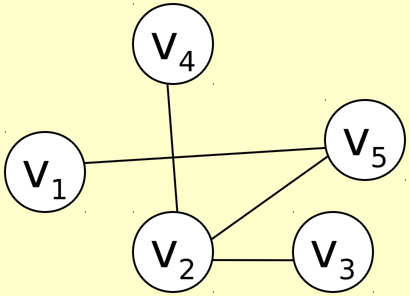
Laboratoire de Recherche en Informatique

quadri@lri.fr

Rappels : Notion de graphe

Un graphe est un ensemble G = (V,E) où

- $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ est l'ensemble des sommets du graphe
- $E \subset V \times V$ est l'ensemble des arêtes du graphe
  - une arête peut se représenter par un lien entre deux sommets



$V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$E = \{(v_1,v_5),(v_2,v_3),(v_2,v_4),(v_2,v_5)\}$

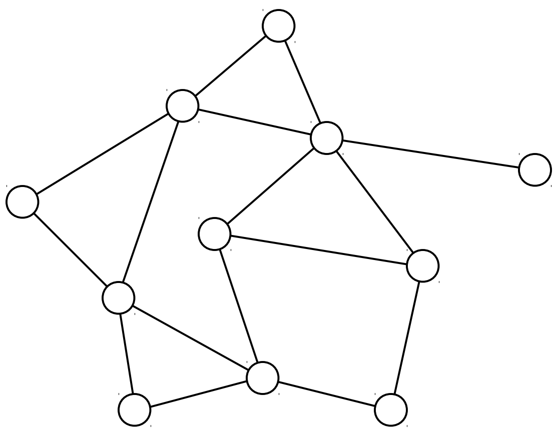
Exemple de graphe à 5 sommets

- deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête

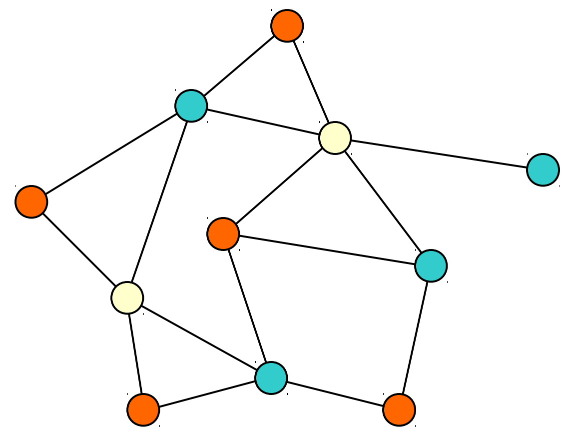
Problèmes d'optimisation combinatoires via les graphes

Problème de coloration

- colorier les sommets d'un graphe en utilisant le moins de couleurs possibles, sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur



Graphe



Exemple de solution admissible x
f(x) = 3

Problème de coloration (sous forme d'1 prog math (cf. 2ème partie de ce cours)

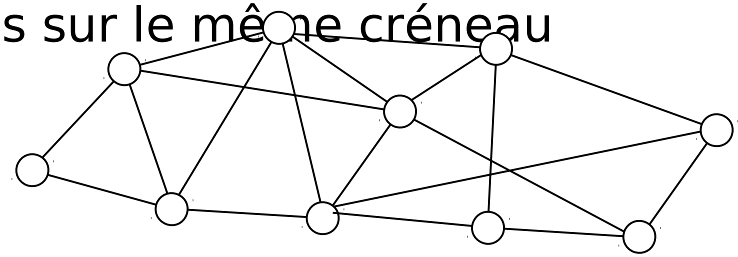
- ensemble des solutions admissibles :
  - données
    - graphe G=(V,E) avec $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ et $E \subset V \times V$
    - ensemble $C = \{c_1,\ldots,c_n\}$ des couleurs disponibles
  - variables :
    - $x_i \in \{1,\ldots,n\}$ pour $1 \leq i \leq n$
    - $x_i = k$ si le sommet v_i est colorié avec la couleur c_k
  - contraintes :
    - $x_i \neq x_j$ pour tout couple de sommets $(v_i,v_j) \in E$

$$\boxed{X = \{\ x \in \{1,\ldots,n\}^n \mid \forall\ (v_i,v_j) \in E,\ x_i \neq x_j\ \}}$$

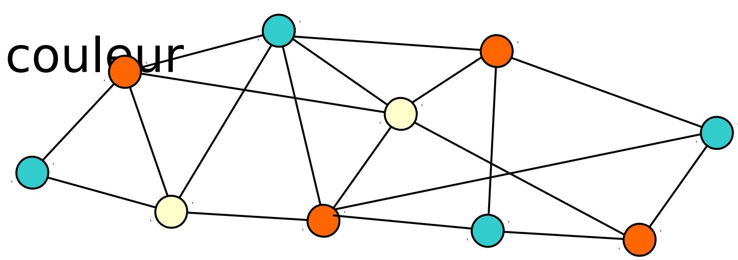
- fonction d'évaluation :
  - $f(x)$ = nombre de valeurs différentes prises par les x_i pour $1 \leq i \leq n$
  - alternative pour la minimisation : $f(x) = \max \{\ x_i \mid 1 \leq i \leq$

Problème de coloration

- applications : problèmes d’emploi du temps
  - description
    - 10 UE disponibles
    - chaque étudiant s’inscrit aux UE de son choix
  - quels créneaux horaires affecter (de manière répétée) aux UE
    - des UE suivies par un même étudiant ne peuvent pas être planifiées sur le même créneau



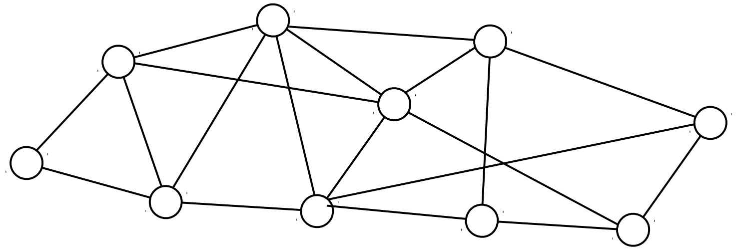
    - 1 créneau = 1 couleur



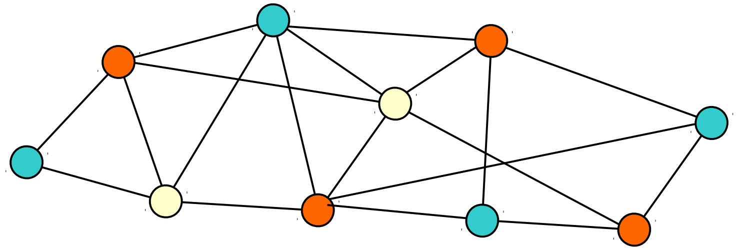
Problèmes d'optimisation combinatoires

Problème de coloration

- applications : gestion de stocks de produits dangereux
  - description
    - 3 entrepôts, 10 produits
    - graphe d'incompatibilité entre les produits



  - dans quels entrepôts placer les produits ?
    - 1 entrepôt = 1 couleur



Problème de coloration

- applications : cartographie

Théorème des 4 couleurs : toute carte peut être coloriée avec 4 couleurs, sans que deux pays voisins soient de la même couleur

- version graphe :
  - un graphe planaire est un graphe qui peut être représenté dans le plan sans que ses arêtes ne se coupent
  - tout graphe planaire peut être colorié avec 4 couleurs

Problème de coloration : Algorithme de Welsh et Powell

- C'est une heuristique i.e. ne fournit pas obligatoirement la solution optimale
- 1. Repérer le degré de chaque sommet.
- 2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants (dans certains cas plusieurs possibilités).
- 3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
- 4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
- 5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
- 6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
- 7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colorié de la liste.
- 8. Répéter les opérations 4 à 6.
- 9. Continuer jusqu'à avoir coloré tous les sommets.