PROGRAMMATION LINEAIRE

P. TOLLA

I. INTRODUCTION

Un grand nombre de problèmes de Recherche Opérationnelle peuvent être modélisés sous forme de programmes linéaires : par exemple certains problèmes d'investissement, problèmes d'alliage de matériaux ou de mélange de produits chimiques, problèmes de flots ou de multiflots dans les réseaux, problèmes de transport et d'affectation, ...
La méthode du simplexe de Dantzig permet de résoudre de façon satisfaisante bon nombre de ces problèmes ; convenons cependant qu'une modélisation hâtive d'un problème sous cette forme peut conduire à l'utilisation d'une méthode simpliciale là où un logiciel spécifique se montrerait plus efficace (méthode hongroise pour les problèmes d'affectation par exemple).

II. NOTIONS FONDAMENTALES

On supposera connues les définitions et propriétés essentielles des espaces vectoriels et des espaces affins, les normes et distances.

II.1. <u>Vecteurs et points</u>

Dans l'espace vectoriel IR^n un vecteur V est représenté par un n-uplet de nombres réels : $V = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Au vecteur V on peut faire correspondre un point M de l'espace affin associé à IR^n de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ relativement à un repère fixé d'origine 0 de coordonnées $(0,0,\ldots,0)$.

II.2. <u>Hyperplan</u>

Définition 1 :

Soit A un vecteur de IR^n différent du vecteur nul et $a \in IR$; On appelle *hyperplan* et on note H(A,a) l'ensemble des vecteurs X de IR^n tels que

$$\begin{cases} X^t.A = a \\ H(A,a) = \{X \in IR^n \ / \ A^t.X = a\} \end{cases}$$

L'hyperplan H(A,a) sépare l'espace IR^n en deux demi-espaces fermés $H^+(A,a)$ et $H^-(A,a)$ tels que :

$$H^+(A,a)=\{X \in IR^n \,/\, A^t.X \geq a\} \text{ et } H^-(A,a)=\{X \in IR^n \,/\, A^t.X \leq a\}$$

II.3. Ensembles convexes

Définition 2 :

Soient les vecteurs $U^1,U^2,\ldots,U^k$ de IR^n ; on appelle *combinaison convexe* de $U^1,U^2,\ldots,U^k$ un vecteur $U=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i U^i$ où $\alpha_i \geq 0$ pour $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ et $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1$.

Définition 3 :

Un partie C de IR^n est dite *convexe* si et seulement si pour toute paire (U^1,U^2) de vecteurs de C, toute combinaison convexe de U^1 et U^2 est dans C.

N.B. : *Dans la suite, nous prendrons la liberté, pour plus de simplicité, de ne pas distinguer* IR^n *de l'espace affin qui lui est associé.*

Propriété 1 :

Si C est convexe, toute combinaison linéaire convexe de points de C est dans C.

Théorème 1 :

Tout point d'un segment reliant deux points du sous espace affin associé à IR^n peut être exprimé comme une combinaison linéaire convexe de ces deux points.

Définition 4 :

Un point U d'un ensemble convexe est appelé *point extrême* s'il ne peut être exprimé comme combinaison linéaire convexe de eux autres points distincts de C.

Définition 5 :

Soit $S \subset IR^n$; on appelle *enveloppe convexe* de S l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires convexes de points de S.

Définition 6 :

Si l'ensemble S comporte un nombre fini de points, l'enveloppe convexe de S est appelé *polyèdre convexe.* Les points extrêmes de l'enveloppe convexe sont appelés *sommets.*

Définition 7 :

Soit $S \subset IR^n$; S est un *cône* si , pour tout réel λ positif, et pour tout vecteur U de S , λU appartient à S.

Définition 8 :

Un *simplexe* Σ est un polyèdre convexe à n dimensions ayant exactement n+1 sommets et défini par $\Sigma = \left\{ X \in \left(IR^{+}\right)^{n} \; / \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$.

Définition 9 :

Un polyèdre convexe est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

II.4. Méthode matricielle de Gauss-Jordan

Soit à résoudre le système linéaire $A.x = b$ où $A = \left\{a_{ij}\right\}_{\substack{i=1,\ldots n\\ j=1,\ldots n}}$ est une matrice inversible.

Pour simplifier la présentation, on supposera qu'à chaque étape de la méthode le pivot peut être pris su la diagonale de la matrice de travail.
Lorsque l'on veut résoudre le système linéaire et exhiber l'inverse de la matrice A, ce qui sera très utile pour la méthode du simplexe, on appliquera la méthode de Gauss-Jordan au tableau $T^{(0)}$ suivant :

$$T^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{array}\right) = \left[\, A \mid Id \mid b \,\right]$$

La méthode de Gauss-Jordan consiste à annuler successivement les termes au dessus et au dessous de la diagonale dans chaque colonne de A et remplacer l'élément diagonal de la colonne considérée par 1 à l'aide des formules suivantes :
Soit k le numéro de l'itération, de la ligne et de la colonne du pivot ; on notera $a_{ij}^{(k)}$ la valeur l'élément sur la ligne i et la colonne j du tableau $T^{(k)}$.

$$\begin{cases} a_{kj}^{(k)} = \dfrac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & \forall j \in \{1,2,\ldots n\} \\[2ex] a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & \forall i,j \in \{1,2,\ldots n\} - \{k\} \end{cases}$$

Exemple : Soit à résoudre le système linéaire A.x=b suivant et inverser la matrice A :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La méthode de Gauss-Jordan donne les tableaux suivants :

$$T^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc||c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad T^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc||c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$T^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc||c} 1 & 0 & -7 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 7 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad T^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc||c} 1 & 0 & 0 & -5/18 & 1/18 & 7/18 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/18 & 7/18 & -5/18 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 7/18 & -5/18 & 1/18 & 1/6 \end{array}\right]$$

On remarque que :

$$T^{(1)} = E_0 T^{(0)} \text{ avec } E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{(2)} = E_1 T^{(1)} \text{ avec } E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{(3)} = E_2 T^{(2)} \text{ avec } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/18 \\ 0 & 1 & -5/18 \\ 0 & 0 & 1/18 \end{bmatrix}$$

On en déduit facilement que $T^{(2)} = E_2.E_1.E_0.T^{(0)}$ et $A^{-1} = E_2.E_1.E_0$.

Ce résultat se généralise au cas de matrices inversibles quelconques ; les matrices d'élimination de Gauss-Jordan successives s'écriront :

$$\boxed{E_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -a_{1k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -a_{2k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 / a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{nk}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}$$

L'inverse de la matrice A s'écrira sous forme produit : $\boxed{A^{-1} = \prod_{i=1}^{n} E_{n-i}}$

III. FORMULATION D'UN PROGRAMME LINEAIRE

III.1. Forme Générale

Un programme linéaire peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq\geq b_i, \ \forall i \in \{1,\dots,m\} \\ \quad x_j \geq 0, \ \forall j \in \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

Nous verrons par la suite qu'un programme linéaire comportant des contraintes d'égalité peut également se mettre sous cette forme.

II.2. Forme matricielle :

Soit $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $c = [c_1,\dots,c_n]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Le programme linéaire ci-dessus s'écrit :

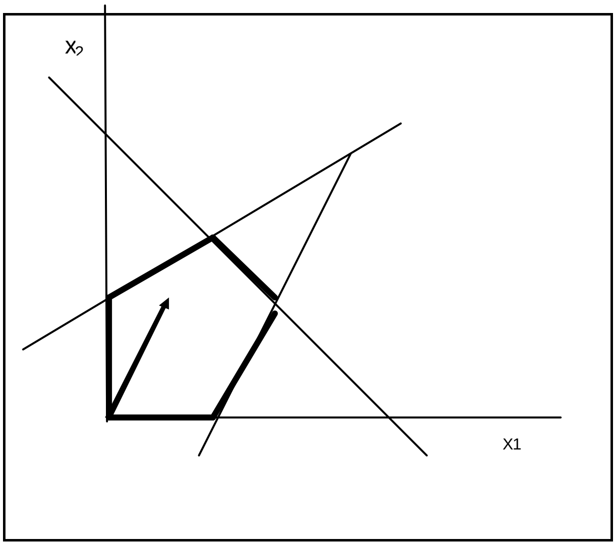
$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) = c.x \\ \text{avec} \quad A.x \leq\geq b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

III.3. Représentation géométrique

A chaque contrainte d'égalité correspond un hyperplan, à chaque contrainte d'inégalité un demi espace dont la frontière est l'hyperplan défini par l'égalité.

Exemple :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) = 2x_1 + x_2 \\ \text{avec} \quad -x_1 + x_2 \leq 4 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ \quad x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



La flèche représente le gradient de la fonction économique au point O :

$$\nabla f(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On constate que l'ensemble des points vérifiant les contraintes est un polyèdre convexe.

IV. THEOREMES FONDAMENTAUX DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.1. Variables d'écart

Soit le programme linéaire (PL1) :

$$(PL1)\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq\geq b_i, \ \forall i \in \{1,\dots,m\} \\ \quad x_j \geq 0, \ \forall j \in \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

On supposera dans la suite que le vecteur b est toujours positif ou nul.
On transforme les contraintes d'inégalité en égalités par adjonction de variables positives exprimant l'écart entre le membre de gauche et le membre de droite de chaque équation et appelées *variables d'écart*.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \text{ devient } \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ \text{ devient } \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$$

(PL1) est transformé en (PL2) :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \ i \in I^+ \\ \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \ i \in I^- \\ \quad x_j \geq 0, \ \forall j \in \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

où I^+ et I^- sont les nsembles d'indices respectifs des contraintes d'inégalité inférieures et supérieures.

Sous forme matricielle on peut écrire (PL) $\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) = c.x \\ \text{avec} \qquad A.x \leq\geq b \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases}$

IV.2. Définitions

Définition 10 :

Une *solution réalisable* est un vecteur vérifiant les contraintes (1) et (2).

Définition 11 :

Une *solution réalisable de base* est une solution réalisable dont au plus m composantes sont strictement positives.

Définition 12 :

Une solution est *non dégénérée* si elle comporte exactement m composantes strictement positives

Définition 13 :

Une solution de base est *optimale* si elle maximise f(x)=c.x.

IV.3. Théorèmes fondamentaux

Théorème 2 :

L'ensemble P des solutions réalisables d'un programme linéaire est un ensemble convexe

En effet, soient x^1 et x^2 deux solutions réalisables quelconques ; elles vérifient :

$$A.x^1 = b \text{ et } x^1 \geq 0$$
$$A.x^2 = b \text{ et } x^2 \geq 0$$

Soit un scalaire α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$ et $x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$. Alors :

$A.x = A.\left[\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right] = \alpha A.x^1 + (1-\alpha)A.x^2 = \alpha b + (1-\alpha)b = b$.

Remarque : P *est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans, donc de demi espaces fermés ; c'est donc un polyèdre convexe ; il peut être soit vide, soit fermé et borné, soit il existe à l'intérieur de* P *une direction d'infinitude. Pour simplifier, nous supposerons que* P *est borné, et dans ce cas nous pourrons utiliser la propriété suivante :*

Propriété 2 :

Si P est un polyèdre convexe fermé borné, il est l'enveloppe convexe de ses points extrèmes.

Dans ce cas, toute solution réalisable est combinaison linéaire convexe des sommets réalisables. Nous montrerons dans la suite comment on peut savoir si le polyèdre est vide ou possède une solution d'infinitude.

Théorème 3 :

> La fonction économique atteint son maximum en un sommet du polyèdre P. Si elle atteint l'optimum en plusieurs sommets, celui-ci est obtenu pour toute combinaison linéaire convexe de ces sommets.

P polyèdre convexe a un nombre fini de sommets réalisables. Soient $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^p$ ces sommets, et x° une solution réalisable optimale. On a :

$$f(x) \leq f(x^\circ) \ \forall\ x \in P.$$

Supposons que x° ne soit pas un sommet ; alors x° est combinaison linéaire convexe de $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^p$, c'est à dire :

$$x^\circ = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{x}^i \text{ avec } \alpha_i \geq 0 \ \forall i \in \{1,\ldots,p\} \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

d'où :

$$f(x^\circ) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{x}^i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f\left(\overline{x}^i\right)$$

Soit $f(\overline{x}^m) = \mathrm{Max}\left\{f\left(\overline{x}^1\right), f\left(\overline{x}^2\right), \ldots, f\left(\overline{x}^p\right)\right\}$; alors $f\left(\overline{x}^m\right) \geq f\left(\overline{x}^i\right),\ \forall i \in \{1,2,\ldots,p\}$.

Donc :

$$.f(x^\circ) \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f\left(\overline{x}^m\right) \text{ et } f(x^\circ) \leq f\left(\overline{x}^m\right) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i;\ \text{donc } f(x^\circ) \leq f\left(\overline{x}^m\right).$$

Mais $\forall x \in P$, $f(x) \leq f(x^\circ)$; donc $f\left(\overline{x}^m\right) \leq f(x^\circ)$.

On en déduit évidemment que $f(\overline{x}^m) = f(x^\circ)$ et que l'optimum est atteint en un sommet du polyèdre.

Supposons que f(x) atteigne sa valeur optimale en plusieurs points extrêmes $x^1, x^2, \ldots, x^q$; c'est à dire : $f\left(x^1\right) = f\left(x^2\right) = \ldots = f\left(x^q\right) = m$.

Soit X combinaison linéaire convexe de ces sommets :

$$X = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i x^i,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ \forall i \in \{1,2,\ldots q\},\ \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f\left(x^i\right) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i m = m$$

X est donc solution optimale.

Notons $A^1, A^2, \ldots, A^n$ les colonnes de la matrice A ; nous allons trouver une relation entre les sommets du polyèdre P et les colonnes de A. Les contraintes autres que celles de positivité des variables peuvent s'écrire : $\sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b$

Théorème 4 :

Si l'on peut trouver parmi $A^1, A^2, \ldots, A^n$, k ($\leq$m) vecteurs linéairement indé-pendants $A^{\nu_1}, A^{\nu_2}, \ldots, A^{\nu_k}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} A^{\nu_i} x_{\nu_i} = b$ où $x_{\nu_i} \geq 0 \ \forall i \in \{1,2,\ldots,k\}$, alors le point défini par $X = \left(0,\ldots,0, x_{\nu_1}, 0,\ldots,0, x_{\nu_2}, 0,\ldots,0, x_{\nu_k}, 0,\ldots,0\right)$ est un sommet du polyèdre P.

Supposons que X ne soit pas un sommet de P ; puisque X est solution réalisable, il peut être considéré comme combinaison linéaire convexe de deux autres points X^1 et X^2 de P ; c'est à dire :

$$X = \alpha X^1 + (1-\alpha) X^2, \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Comme X^1 et X^2 sont solutions réalisables, leur composantes sont positives ou nulles ; d'autre part α est compris entre 0 et 1 et les composantes de X s'écrivent :

$$x_i = \alpha x_i^1 + (1-\alpha) x_i^2, \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

On en déduit que le composantes de X^1 et X^2 correspondant aux composantes nulles de X sont elles aussi nulles.

X^1 et X^2 étant des solutions réalisables, on a :

$$\begin{cases} A.X^1 = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} A^{\nu_i} x_{\nu_i}^1 = b \\ A.X^2 = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} A^{\nu_i} x_{\nu_i}^2 = b \end{cases}$$

Comme $A^{\nu_1}, A^{\nu_2}, \ldots, A^{\nu_k}$ sont linéairement indépendants, l'écriture de b comme combinaison linéaire de ces vecteurs est unique et donc $x_{\nu_i}^1 = x_{\nu_i}^2, \ \forall i \in \{1,2,\ldots,k\}$

X^1 et X^2 ayant les mêmes composantes sont égaux . X ne peut donc être exprimé comme combinaison linéaire convexe de deux points réalisables distincts de P. Donc X est un sommet.

Théorème 5 :

Soit X un point extrême de P, alors les vecteurs A^i associés à ses composantes positives forment une ensemble de vecteurs linéairement indépendants.

On ne nuit pas à la généralité en imposant que les k premières composantes de X soient non nulles.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vérifie $\sum_{i=1}^{n} A^i x_i = b$.

Supposons que $A^1, A^2, ..., A^k$ soient linéairement *dépendants*. Il existe alors des scalaires $d_1, d_2, ..., d_k$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{k} A^i d_i = 0$.

Soit un scalaire d>0 ; on peut écrire :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} A^i x_i + d\sum_{i=1}^{k} A^i d_i = b \\ \sum_{i=1}^{k} A^i x_i - d\sum_{i=1}^{k} A^i d_i = b \end{cases}$$

On dispose maintenant de deux solutions réalisables

$$X^1 = \begin{bmatrix} x_1 + dd_1 \\ x_2 + dd_2 \\ \vdots \\ x_k + dd_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } X^2 = \begin{bmatrix} x_1 - dd_1 \\ x_2 - dd_2 \\ \vdots \\ x_k - dd_{1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On peut choisir d positif suffisamment petit pour que, sachant que $x_i > 0, \forall i \in \{1,...,k\}$ toutes les composantes de X^1 et X^2 soient positives. X^1 et X^2 sont alors des solutions réalisables.

De plus , $X = \frac{1}{2}X^1 + \frac{1}{2}X^1$.

Donc X est combinaison linéaire de deux points de P . Dans ce cas, X ne peut être un sommet ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de ce théorème.

Remarque : on peut supposer, sans perte de généralité, que, parmi les vecteurs $A^1, A^2, ..., A^n$, il en existe au moins m qui sont linéairement indépendants et que lon peut compléter tout vecteur de k (£m) vecteurs linéairement indépendants par m-k vecteurs linéairement indépendants de $A^1, ..., A^k$ pour avoir m vecteurs linéairement indépendants.

Corollaire 1 :

A chaque point extrême de P est associé un ensemble de m vecteurs linéairement indépendants choisis parmi $A^1, A^2, ..., A^n$.

D'après le théorème 5, il existe k vecteurs linéairement indépendants correspondant à un sommet.

Si k<m, soient $A^1, A^2, ..., A^k$ ces vecteurs ;on peut trouver r-k vecteurs $A^{k+1}, A^{k+2}, ..., A^r$ $(r < m)$, tels que $A^1, A^2, ..., A^r$ soient linéairement indépendants. Ceci

contredit l'hypothèse suivant laquelle on peut toujours trouver un ensemble de m vecteurs linéairement indépendants parmi $A^1, A^2, ..., A^n$. Donc k=m.
on peut résumer ces différents théorèmes de la façon suivante :

Théorème 6 :

$X = (x_1, ..., x_n)^t$ est un sommet de $\mathcal{P}$ si et seulement si les composantes x_i positives sont les coefficients de vecteurs A^i linéairement indépendants dans $\sum_{j=1}^{n} A^i x_i = b$.

En conclusion, on peut retirer les informations suivantes des théorèmes précédents :

1. La solution optimale, si elle existe ou n'est pas non bornée, est atteinte en un sommet du polyèdre $\mathcal{P}$
2. A chaque sommet généralisé ou non du polyèdre $\mathcal{P}$ correspons un ensemble de m vecteurs $A^{\nu_1}, A^{\nu_2}, ..., A^{\nu_m}$ choisis parmi $A^1, A^2, ..., A^n$.

La tentation d'examiner tous les sommets, de calculer la valeur de la fonction économique pour chacun d'entre eux après avoir vérifié qu'il est réalisable. Cette manière de procéder est appelée énumération explicite, chaque solution de base étant calculée en résolvant le système linéaire carré : $\sum_{j=1}^{n} A^{\nu_j} x_{\nu_j} = b$.

Or un majorant du nombre de sommet est C_n^m. Si l'on considère un programme linéaire comportant 400 variables et 100 contraintes et si l'on suppose qu'un système linéaire à 100 variables est résolu en 10^{-3} seconde, la résolution demandera $2,2418548 \times 10^{96}$ secondes soit 7,0894518 années bissextiles. D'où le postulat de bon sens :

On n'énumère jamais dans le combinatoire !

La méthode suggérée ci-dessus n'étant pas réaliste, il convient d'utiliser des méthodes convergentes limitant le champ d'exploration des solutions examinées et donc le nombre d'itérations et peu coûteuses au niveau de chaque itération. Il faut bien entendu un critère permettant de tester l'optimalité de chaque solution trouvée.

IV.4. <u>Test d'optimalité</u>

Soit le programme linéaire (PL) :

$$(PL)\begin{cases}\text{Maximiser } z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{avec } \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b \\ x_j \geq 0 \ \forall j \in \{1,...,n\}\end{cases}$$

Pour simplifier l'exposé et sans perte de généralité, nous pouvons considérer que :

$$X=(x_1,x_2,...,x_m,0,...,0) \text{ avec } x_j > 0 \quad \forall j \in \{1,...,m\}$$

est une solution réalisable où les m premières colonnes de A sont linéairement indépendantes. Nous avons :

$$\begin{cases}(1) \ \sum_{j=1}^{m} c_j x_j = z° \\ (2) \ \sum_{j=1}^{m} A^j x_j = b\end{cases}$$

$A^1, A^2,...,A^m$ étant linéairement indépendantes,toute colonne de A peut être exprimée comme combinaison linéaire de ces vecteurs ; c'est à dire :

$$(3) \ A^j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A^i \quad \forall j \in \{1,2,...,n\}$$

Définissons z_j de la façon suivante :

$$(4) \ z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i \quad \forall j \in \{1,2...,n\}$$

Théorème 7 :

Si z° est la valeur de la fonction économique pour la solution réalisable $X=(x_1,x_2,...,x_m,0,...,0)$ avec $x_j > 0 \quad \forall j \in \{1,...,m\}$, et si pour un indice j* quelconque appartenant à $\{m+1,...,n\}$ on a z_{j^*} - c_{j^*} >0, il existe au moins une solution de base admissible donnant à la fonction économique une valeur z<z°.

Soit θ un scalaire positif quelconque ; multiplions l'équation (3) par θ et soustrayons le résultat de l'équation (2). Nous obtenons :

$$(5) \ \sum_{i=1}^{m} A^i.\left[x_i - \theta x_{ij^*}\right] + A^{j^*}\theta = b$$

Multiplions de même (4) par θ et soustrayons le résultat de (1), puis ajoutons $c_j\theta$ aux deux membres de l'équation obtenue :

$$(6)\ \sum_{i=1}^{m} c_i\left[x_i - \theta x_{ij*}\right] + c_{j*}\theta = z° - \left[z_{j*} - c_{j*}\right]\theta$$

Soit $\theta = \mathrm{Min}_i\left\{\frac{x_i}{x_{ij*}} / x_{ij*} > 0\right\}$.

Pour que ce choix soit possible, il faut qu'il existe au moins un $x_{ij} > 0$.

- Si tous les x_{ij} sont négatifs ou nuls, θ peut être choisi arbitrairement grand sans qu'aucun des $x_i - \theta x_{ij}$ soit négatif. ; mais les $x_i - \theta x_{ij}$ constituent alors une solution admissible. Comme par hypothèse $z_{j*} - c_{j*} > 0$, la fonction économique peut être rendue petite en fonction du choix de θ.
- Supposons qu'il existe au moins un $x_{ij*} > 0$ et que $\theta = \mathrm{Min}_i\left\{\frac{x_i}{x_{ij*}} / x_{ij*} > 0\right\} = \frac{x_{i^*}}{x_{i*j*}}$. On remplace θ par sa valeur dans (5) et on obtient : $\sum_{i=1}^{i*} A^i\left[x_i - \theta x_{ij*}\right] + \sum_{i=i*+1}^{m} A^i\left[x_i - \theta x_{ij*}\right] + A^{j*}\theta = b$. Le coefficient de A^{i*} est nul dans cette expression car la valeur de θ a été choisie pour cela. Nous avons ainsi une nouvelle solution admissible définie par :

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = x_i - \theta x_{ij*} & \text{pour } i \in \{1,2,...,i^*\text{-}1,i^*\text{+}1,...,m\} \\ x_{j*} = \theta \end{cases}$$

dont les valeurs sont positives ou nulles en raison du choix de θ et strictement positives lorsque l'indice i* est unique. Dans ce cas on a exactement m variables strictement positives. Montrons maintenant que la solution admissible correspond à un sommet de P . Nous devons pour cela montrer que les vecteurs $A^1,...,A^{i*-1},A^{i*+1},...,A^m,A^{j*}$ sont linéairement indépendants. Nous savons déjà que les m-1 premiers le sont. Supposons que les m vecteurs soient linéairement *dépendants* ; dans ce cas, il existerait des scalaires y_i pour $i \in \{1,2,...,i^*\text{-}1,i^*\text{+}1,...,m\}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{i*-1} A^i y_i + \sum_{i=i*+1}^{m} A^i y_i + A^{j*} y_{j*} = 0$$

Mais $A^1,A^2,...,A^m$ étant linéairement indépendants, A^{j*} s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs (3). Cela voudrait dire que x_{i*j*} est nul car, dans l'expression ci-dessus, le coefficient de A^{i*} est nul. Or on a justement choisi x_{i*j*} non nul. L'hypothèse de départ est donc fausse et les vecteurs $A^1,...,A^{i*-1},A^{i*+1},...,A^m,A^{j*}$ sont linéairement indépendants.

La nouvelle valeur de la fonction économique est $z_0 - [z_j - c_j]\ \theta < z_0$ puisque $z_j - c_j$ et θ sont strictement positifs par hypothèse. Elle a donc diminué.

Remarques :

- *Lorsque plusieurs $z_j - c_j$ sont positifs, on s'intéresse à la variable correspondant à la plus grande de ces valeurs ; nous verrons par la suite l'intérêt de cette démarche et sa signification géométrique.*

- *Les deux m-uplets de vecteurs étudiés correspondant à deux solutions de base successives ne diffèrent que d'un seul vecteur. Les composantes de la nouvelle solution sont :*

$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{x_{i*}}{x_{i*j*}} x_{ij*} \quad \forall i \in \{1,2,...m\}$$

Ces deux remarques décrivent les concepts fondamentaux de la méthode du simplexe de Dantzig : critère de choix de la variable entrant dans la base et constitution de la nouvelle matrice de base.

Le théorème 8 définit le critère d'optimalité de la solution courante.

Théorème 8 :

> Soit une solution réalisable correspondant à un sommet :
> $$X = [x_1, x_2, ..., x_m] \text{ avec } x_i > 0 \ \forall i \in \{1,2,...,m\}.$$
> Si pour tout j de {m+1,...,n } z_j -c_j ≤0 , alors X est solution optimale.

Soit une solution réalisable $X' = [x'_1, x'_2, ..., x'_m]$ pour laquelle la fonction économique prend la valeur z' :

$$\begin{cases} (7) \ \sum_{j=1}^{n} A^j x'_j = b \\ (8) \ \sum_{j=1}^{n} c_j x'_j = z' \end{cases}$$

Suivant l'hypothèse du théorème, pour tout j de {m+1,...,n } z_j -c_j ≤0 .

Soit x_{ij} défini par : $x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

Comme $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$, nous avons dans ce cas $z_j = c_j$ pour $j \in \{1,...,m\}$.

Donc pour tout $j \in \{1,...,n\}$, $z_j - c_j \leq 0$ et donc $z_j \leq c_j$.

Comme $\sum_{i=1}^{n} c_i x'_i = z'$, (9) $z' \geq \sum_{i=1}^{n} z_i x'_i$

En remplaçant les A^j par leur expression dans (3) on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} A^i x_{ij} \right] x'_j = b \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij} x'_j \right] A^i = b$$

De la même façon :

$$(10)\quad \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij}x'_j\right]c_i \le z'$$

Comme les A^i sont linéairement indépendants et $\sum_{i=1}^{m} x_i A^i = b$, cette formulation est unique et

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}x'_j \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}$$

(10) s'écrit alors : $\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \le z'$

On en déduit que toute solution admissible $X' = [x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]$ est moins bonne qu'une solution réalisable correspondant à un sommet X tel que :

$X = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ et vérifie pour tout $j \in \{m+1,\ldots,n\}$ $z_j - c_j \le 0$

V. CONCLUSION

Grâce aux différents théorèmes que nous venons de démontrer, nous allons élaborer une méthode de résolution de programmes linéaires. Nous savons maintenant que :

- Une solution optimale est atteinte en un sommet du polyèdre des points réalisables.
- A tout sommet de ce polyèdre correspond un ensemble de m vecteurs linéairement indépendants $A^{\nu_1}, A^{\nu_2}, \ldots, A^{\nu_m}$ choisis parmi $A^1, A^2, \ldots, A^m$.
- Grâce au théorème (7), on dispose d'une méthode de construction d'une nouvelle solution réalisable à partir d'une autre solution réalisable et qui améliore l valeur de la fonction économique.
- Le m-uplet de vecteurs de la nouvelle solution diffère du m-uplet de la solution précédente d'un seul vecteur.
- Grâce au théorème (8), nous savons si une telle solution est ou n'est pas optimale.

Définition 14 :

Soit X un sommet du polyèdre P. Il lui correspond un ensemble de m vecteurs $A^{\nu_1}, A^{\nu_2}, \ldots, A^{\nu_m}$, linéairement indépendants appelé *bases associée à X*.

Définition 15 :

Le m-uplet $\left(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_m}\right)$ est appelé *solution de base réalisable.*

Définition 16 :

La matrice B de colonnes $A^{\nu_1}, A^{\nu_2}, \ldots, A^{\nu_m}$ est appelée *matrice de base.*

VI. CALCUL DES PROFITS MARGINAUX

Considérons les équations (3) et (4) :
L'équation (3) peut s'écrire plus généralement :

$$(3')\quad A^j = \sum_{i=1}^{m} x_{v_i j} A^{v_i},\quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

De même l'équation (4) peut s'écrire :

$$(4')\quad z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{v_i j} c_{v_i},\ \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

Soit $X^j = \begin{bmatrix} x_{v_1 j} \\ x_{v_2 j} \\ \vdots \\ x_{v_m j} \end{bmatrix}$. Il vérifie l'équation (3') et donc :

$$(3')\quad (3') \quad \Rightarrow\ A^j = B.X^j \ \Rightarrow\ X^j = B^{-1}.A^j$$

car les colonnes de B étant linéairement indépendantes, celle-ci est inversible.

Soit $c_B = \left(c_{v_1}, c_{v_2}, \ldots, c_{v_m}\right)$ le vecteur des coefficients de la fonction économique correspondant aux variables de base.

$$(3')\text{ et }(4')\ \Rightarrow\ z_j = c_B.X^j = c_B.B^{-1}.A^j$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_j = c_j - z_j = c_j - c_B.B^{-1}.A^j \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}}$$

Définition 17 :

Le vecteur $\Delta = \left(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\right)$ est appelé *vecteur des coûts marginaux (ou vecteur des coûts réduits)*.

La connaissance de Δ revêt une très grande importance, car grâce au théorème 8 on peut déterminer si une solution de base réalisable est ou non optimale.

VII. METHODE DU SIMPLEXE DE DANTZIG

VII.1. <u>Formulation matricielle d'un programme linéaire</u>

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \forall i \in \{1,...,m\} \\ \quad x_j \geq 0, \ \forall j \in \{1,...,n\} \end{cases}$$

Soit la matrice $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}$, le vecteur $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, le vecteur $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, le vecteur ligne $c=[c_1,...,c_n]$. Le programme linéaire peut s'écrire :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } z = C.x \\ \text{avec} \qquad A.x = b \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases}$$

Soit une matrice de base B correspondant à une solution réalisable de base ; on peut partitionner A, c et x en fonction des variables de base et hors-base regroupées respectivement dans les sous-vecteurs x_B et x_N. On obtient :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } z = C_B.x_B + c_N.x_N & \text{(i)} \\ \text{avec} \qquad B.x_B + N.x_N = b & \text{(ii)} \\ \qquad\qquad x_B \geq 0, \ \ x_N \geq 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

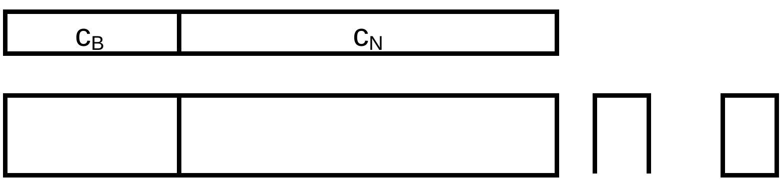
où N est la matrice des colonnes de A qui ne sont pas dans B. (cf. figure VII.1)

Soient $\bar{x}_B$, $\bar{x}_N$ et $\bar{z}$ les sous-vecteurs des variables de base et hors-base et la valeur de la fonction économique correspondant à une matrice de base B. Nous avons vu que les variables hors-base correspondant à un sommet sont nulles : $\bar{x}_N \geq 0$.
Nous obtenons donc à l'aide de (i) et (ii) :

$$\text{(ii)} \ \Rightarrow \ B.\bar{x}_B + N\bar{x}_N = B.\bar{x}_B = b$$

$$\text{(i)} \ \Rightarrow \mathbf{\bar{x}_B = B^{-1}.b}$$

$$\text{(i) et (ii)} \ \Rightarrow \ \mathbf{\bar{z} = c_B.\bar{x}_B = c_B.B^{-1}.b}$$



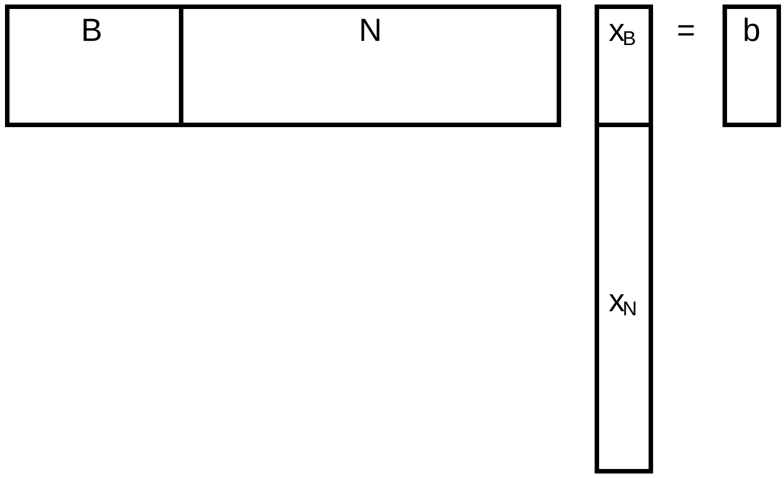


Figure VII.1

VII.2. <u>Amélioration de la valeur de la fonction économique</u>

Comme B est inversible :

$$\text{(ii)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_B = B^{-1}.b - B^{-1}.N.x_N} \quad \text{(iv)}$$

ou encore

$$\mathbf{x_B = \overline{x}_B - B^{-1}.N.x_N}$$

$$\text{(i)} \Rightarrow z = c_B.x_B + c_N.x_N = c_B.\left[B^{-1}.b - B^{-1}.N.x_N\right] + c_N.x_N$$

Donc

$$z = c_B.B^{-1}.b + \left[c_N - c_B.B^{-1}.N\right].x_N$$

ou

$$\mathbf{z = \overline{z}} + \mathrm{D}_{\mathbf{N}}\mathbf{.x_N}$$

Nous remarquons que, dans cette formulation de z, apparaissent seulement les variables hors-base avec comme coefficients les profits marginaux, ce qui est logique car :

$$\Delta_B = c_B - c_B.B^{-1}.b = 0$$

Nous souhaitons trouver une nouvelle base réalisable telle que la solution de base correspondante donne une valeur améliorée de la fonction économique. Pour cela , nous disposons d'une procédure qui permet de construire une nouvelle matrice de base réalisable qui diffère de la précédente d'une seule colonne.

a) Si $\underline{\Delta_N \geq 0}$, la solution obtenue (pour une minimisation) est optimale.

b) <u>Dans le cas contraire</u>, il existe au moins un profit marginal correspondant à une variable hors-base strictement négatif que nous noterons Δ_e; on est alors dans les hypothèses du théorème 7, et on peut faire décroître la valeur de la fonction économique en augmentant la variable x_e correspondant à Δ_e<0. La colonne A^e correspondant à Δ_e entrera dans la base.

Premier Critère de Dantzig :
On choisit de faire rentrer dans la base la colonne dont le coût marginal (<0) est le plus faible.

Le premier critère de Dantzig est une **heuristique** destinée à améliorer la convergence de l'algorithme du simplexe. Il est justifié grâce aux deux propriétés démontrées ci-dessous. Rappelons tout d'abord l définition du gradient d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 17 :

On appelle *gradient* de la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ au point x et l'on note $\nabla f(x)$ le vecteur $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$.

Remarque : pour une fonction linéaire définie par f(x)=c^t.x, Ñf(x)=c.

Propriété 3 :

La direction du gradient d'une fonction linéaire est un direction d'augmentation stricte de la fonction quel que soit le point de départ.

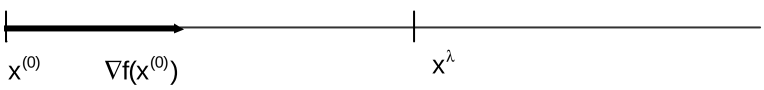
En effet, considérons la demi-droite d'origine $x^{(0)}$ et de direction $\nabla f(x^{(0)})$; un point x^λ de cette demi-droite est défini par :

$$x^\lambda = x^{(0)} + \lambda \nabla f\left(x^{(0)}\right),\ \lambda > 0$$

Supposons que $\nabla f(x^{(0)})$ ne soit pas le vecteur nul (ce qui ôterait tout intérêt à un tel problème d'optimisation !) et calculons $f(x^\lambda)$:

$$\begin{aligned} f\left(x^\lambda\right) &= c^t.x^\lambda = c^t.\left[x^{(0)} + \lambda \nabla f\left(x^{(0)}\right)\right] = c^t x^{(0)} + \lambda c^t.\nabla f\left(x^{(0)}\right) \\ &= f\left(x^{(0)}\right) + \lambda c^t.c \end{aligned}$$

On en déduit évidemment que $f\left(x^\lambda\right) > f\left(x^{(0)}\right)$.



Propriété 2 : (Propriété de l'angle aigu)

Une direction qui fait un angle aigu avec le gradient d'un fonction linéaire est une direction d'augmentation stricte de la fonction quel que soit le point de départ.

En effet, considérons une direction d faisant un angle aigu avec $\nabla f(x^{(0)})$ =c :
Alors $d^t.c > 0$.
Soit un point x^λ sur la demi-droite définie par son origine $x^{(0)}$ et sa direction d :

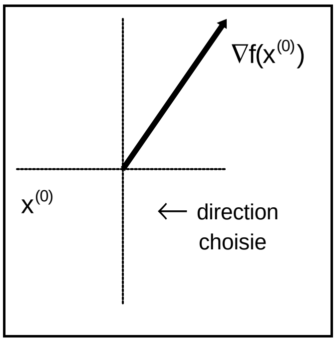
$$x^\lambda = x^{(0)} + \lambda d,\ \lambda > 0$$

et

$$f\left(x^\lambda\right) = c^t.x^{(0)} + \lambda c^t.d$$

On en déduit encore que $f\left(x^{\lambda}\right) > f\left(x^{(0)}\right)$.

Comme corollaire à ces deux propriété, il apparaît clairement qu'une direction qui fait un angle obtus avec le gradient d'une fonction linéaire est une direction de diminution stricte de cette fonction.



Choisir comme direction de diminution celle de plus petit profit marginal négatif revient à se déplacer dans la direction de coordonnée faisant l'angle le plus grand avec la direction du gradient , ce qui a tendance à diminuer la fonction de façon plus rapide qu'en utilisant les autres variables concernées.
Le premier critère de Dantzig est l'heuristique qui a permis à l'algorithme de converger en un temps convenable dans la plupart des cas.

VII.3. <u>Détermination de la variable sortante x_s</u> :

Nous avons montré que $x_B = \overline{x}_B - B^{-1}.N.x_N$.

Posons $\quad Y = B^{-1}.N$.
(iv) devient

$$x_B = \overline{x}_B - Y.x_N.$$

Au cours du changement de base, seule la variable hors-base x_e devient positive, donc :

$$x_B = \overline{x}_B - Y^e.x_N,\ \text{ où } Y^e \text{ est la } (e\text{-}j)^{\text{ème}} \text{ colonne de } Y.$$

D'autre toutes les variables de base doivent être positives. Soit x_i la $i^{\text{ème}}$ composante de x_B et $\overline{x}_i$ la $i^{\text{ème}}$ composante de $\overline{x}_B$; on a :

$$x_i = \overline{x}_i - Y_i^e x_e \geq 0 \text{ (où } Y_i^e \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ composante de } Y^e),\ \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

Donc

$$x_e \leq \frac{\overline{x}_i}{Y_i^e}\ \forall i \text{ tel que } Y_i^e > 0$$

D'où $\quad x_e \leq \mathrm{Min}\left\{\frac{\overline{x}_i}{Y_i^e}\ /\ Y_i^e > 0\right\}$

Deuxième Critère de Dantzig :

On prendra comme variable sortante la <u>$s^{\text{ème}}$</u> variable de la base vérifiant :

$$x_e = \mathrm{Min}\left\{ \frac{\overline{x}_i}{Y_i^e} \ / \ Y_i^e > 0 \right\} = \frac{\overline{x}_s}{Y_s^e}$$

de façon à diminuer le plus possible la fonction économique sans sortir du polyèdre des points réalisables.

Remarques :

- *Le second critère de Dantzig est une application directe de la procédure utilisée dans la démonstration du théorème 7 pour obtenir une nouvelle solution de base réalisable dont la matrice de base ne diffère que d'une seule colonne de la matrice de base précédente ; une des anciennes variable s'annule et devient variable hors-base ; elle est remplacée dans la base par la variable hors-base de l base précédente de plus petit coût marginal.*
- *Lorsque la variable entrante est nulle, ou lorsque quelques unes des variables de base sont nulles, la solution est dite dégénérée. Nous verrons par la suite les problèmes de convergence que peuvent poser de telles solutions.*
- *Si toutes les composantes de Y^e sont négatives ou nulles, le programme linéaire a une solution* ***non bornée****.*

VII.4. Détermination de la variable sortante :

La variable qui sort de la base est celle qui s'annule lorsque x_e entre dans la base avec la valeur indiquée dans le second critère, c'est-à-dire :

$$Y_s^e > 0 \ \text{ et } \ x_e = \frac{\overline{x}_s}{Y_s^e}$$

ATTENTION !

La colonne qui sort de la base est celle qui se trouve en **s<u>ème</u>** position dans celle-ci, c'est à dire A^{v_s}. **S** n'est pas le numéro de la variable sortante dans l'ensemble de toutes les variables, mais indique sa position **dans la base**.

Il faut ensuite appliquer à nouveau le premier critère de Dantzig pour déterminer si la solution obtenue est optimale. Si ce n'est pas le cas, on effectue une nouvelle recherche de solution de base améliorante.
Sauf en cas de solution dégénérée, la valeur de la fonction économique diminue à chaque itération ; comme elle est bornée inférieurement (sauf en cas de solution non bornée que l'on sait diagnostiquer), l'algorithme engendre une suite finie et convergente, car monotone, décroissante et bornée inférieurement. Sous l'hypothèse de non dégénérescence, l'algorithme est donc convergent.

VIII. PRATIQUE DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE : METHODE DES TABLEAUX

VIII.1. Formulation du problème

Nous étudierons d'abord le *programme canonique* qui a l'avantage d'avoir une solution évidente :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & (1) \\ \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \forall i \in \{1,...,m\} & (2) \\ x_j \ge 0, \ \forall j \in \{1,...,n\} & (3) \end{cases}$$

où $b_i \ge 0 \ \forall i \in \{1,...,m\}$.
Nous étudierons plus tard le cas général de contraintes d'inégalité et d'égalité.

VIII.2. <u>Variables d'écart</u>

Pour appliquer la méthode du simplexe, nous allons transformer le système d'inéquations (2) en un système d'équations (2') en ajoutant à chaque membre de gauche des inéquations une variable positive ou nulle appelée *variable d'écart*.

Le programme linéaire devient :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & (1) \\ \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \ \forall i \in \{1,...,m\} & (2') \\ x_j \ge 0, \ \forall j \in \{1,...,n+m\} & (3) \end{cases}$$

Ce procédé a l'avantage de fournir une <u>solution réalisable de base initiale</u> définie par

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = ... = x_n = 0 \\ x_{n+i} = b_i \ \forall i \in \{1,...,m\} \end{cases}$$

VIII.3. <u>Méthode des tableaux du simplexe</u> (sur un exemple)

Soit à résoudre le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } z = 50x_1 + 60x_2 \\ \text{avec} \qquad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \qquad\qquad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \qquad\qquad 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ \qquad\qquad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En ajoutant les variables d'écart x_3, x_4 et x_5, on obtient :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } z = 50x_1 + 60x_2 \\ \text{avec} \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ \qquad\qquad x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ \qquad\qquad 9x_1 + 4x_2 + x_5 = 36 \\ \qquad\qquad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B	
$c_B \downarrow$	$c \rightarrow$	50	60	0	0	0	0	
0	x_3	1	**2**	1	0	0	8	← ligne du pivot
0	x_4	1	1	0	1	0	5	
0	x_5	9	4	0	0	1	36	

↑ variables de base   ↖*colonne entrante*   ↖ sol. de base initiale

La base est constituée des colonnes A^3, A^4 et A^5 ; la matrice de base $B^{(0)}$ est donc dans ce cas la matrice identité.
La solution de base initiale est donnée par :

$$\overline{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 36 \end{bmatrix} \text{ et } \overline{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } z = 0$$

Les profits marginaux des variables hors-base sont d'après la formule du paragraphe VI :

$$\Delta_1 = c_1 - c_{B^{(0)}}.\left[B^{(0)}\right]^{-1}.A^1 = 50 - (0,0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} = 50$$

$$\Delta_2 = c_1 - c_{B^{(0)}}.\left[B^{(0)}\right]^{-1}.A^2 = 60 - (0,0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 60$$

On remarque qu'à la première itération les profits marginaux des variables hors-base sont égaux aux coefficients correspondants de la fonction économique.

Le plus grand profit marginal est Δ_2. ***La colonne A^2 entre dans la base*** (1^{er} critère de Dantzig).
Pour trouver la colonne sortant de la base, on utilise le second critère de Dantzig : on fait le quotient des composantes de la solution de base x_B par les composantes positives de la colonne entrante dans le tableau courant. On a :

$$x_2 = \mathrm{Min}\left\{\frac{8}{2}, \frac{5}{1}, \frac{36}{4}\right\} = 4$$

Donc la position dans la base de la variable sortant de la base est s=1 ; ***la colonne A^3 sort de la base***.
On remplace x_3 par x_2 dans la colonne de gauche du tableau du simplexe et on transforme la deuxième colonne du tableau en la colonne canonique ou le 1 se place sur la première ligne des contraintes à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan exposée plus haut.
Remarque :
La fonction économique sera ainsi exprimée, grâce à ce changement de variable en fonction des seules variables hors-base ; ses coefficients sont alors les profits marginaux.
Le nouveau tableau du simplexe est :

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B
$c_B \downarrow$	$c \rightarrow$	20	0	-30	0	0	-240
60	x_2	1/2	1	1/2	0	0	4
0	x_4	**1/2**	0	-1/2	1	0	1
0	x_5	7	0	-2	0	1	5

La nouvelle solution de base est donc :

$$\overline{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \overline{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } z = 240$$

Comme le plus grand profit marginal est positif, cette solution n'est pas optimale. On fait donc une nouvelle itération de manière identique : ***A^1 entre dans la base*** et :

$$x_1 = \mathrm{Min}\left\{8, 2, \frac{20}{7}\right\} = 2$$

Donc s=2 et ***A^4 sort de la base***.

Le nouveau tableau du simplexe est :

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B
$c_B \downarrow$	$c \rightarrow$	0	0	-10	-40	0	-280
60	x_2	0	1	1	-1	0	3
50	x_1	1	0	-1	2	0	2

0	x_5	0	0	5	-14	1	6

La nouvelle solution de base est :

$$\bar{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } z = 280$$

Nous sommes à l'optimum car les profits marginaux sont tous négatifs ou nuls.

VIII.4. <u>Exemple</u> :

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_5 \\ \text{avec} \quad 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 7 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 \leq 1 \\ - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

En ajoutant les variables d'écart x_6, x_7, x_8, et x_9 on obtient le programme équivalent :

$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_5 \\ \text{avec} \quad 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + x_7 = 1 \\ - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_8 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 + x_9 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

L'application de la méthode du simplexe donne les tableaux décrits dans la figure VIII.4.

La solution de base est : $x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $z = 8$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_B
c	3	2	3	0	3	0	0	0	0	0
6	2	0	1	2	2	1	0	0	0	7
7	**1**	1	0	-1	1	0	1	0	0	1

8	0	-1	2	2	0	0	0	1	0	2
9	-1	1	-2	0	1	0	0	0	1	5
Δ	0	1	3	3	0	0	-3	0	0	-3
6	0	-2	1	4	0	1	-2	0	0	5
1	1	1	0	-1	1	0	1	0	0	1
8	0	-1	**2**	2	0	0	0	1	0	2
9	0	2	-2	-1	2	0	1	0	1	6
Δ	0	1/2	0	0	0	0	-3	-3/2	0	-6
6	0	-3/2	0	3	0	1	-2	-1/2	0	4
1	1	**1**	0	-1	1	0	1	0	0	1
3	0	-1/2	1	1	0	0	0	1/2	0	1
9	0	1	0	1	2	0	1	1	1	8
Δ	-1/2	0	0	1/2	-1/2	0	-7/2	3/2	0	-13/2
6	3/2	0	0	3/2	3/2	1	-1/2	-1/2	0	11/2
2	1	1	0	-1	1	0	1	0	0	1
3	1/2	0	1	**1/2**	1/2	0	1/2	1/2	0	3/2
9	-1	0	0	1	1	0	0	1	1	7
Δ	-1	0	-1	0	-1	0	-4	-2	0	-8
6	0	0	-3	0	0	1	-2	-2	0	1
2	2	1	2	0	2	0	2	1	0	4
4	1	0	2	1	1	0	1	1	0	3
9	-3	0	-4	0	-1	0	-2	1	1	1

Figure VIII.4.

IX. RESOLUTION DE PROGRAMMES LINEAIRES GENERAUX A L'AIDE DE LA METHODE DES TABLEAUX DU SIMPLEXE

Il s'agit de résoudre des programmes linéaires comportant des contraintes d'inégalité inférieure et/ou supérieure et/ou d'égalité. Nous présenterons dans la uite la méthode du simplexe en deux phases sur un exemple au cours de la résolution duquel nous donnerons toutes les définitions et informations utile à la mise en ouvre de cette méthode

IX.1. <u>Cas des contraintes d'inégalité</u>

Considérons le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{Max } z = -6x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{avec} \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant les variables d'écart positives x_4, x_5 et x_6 on obtient le programme linéaire équivalent suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } z = -6x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{avec} \quad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ \quad 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 6 \\ \quad -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 3 \\ \quad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots; x_6 \geq 0 \end{cases}$$

L'annulation des variables structurelles x_1, x_2 et x_3 ne permet pas d'exhiber une solution de base réalisable car alors $x_3 = -2,\ x_4 = -6;\ x_5 = 3.$ D'où l'idée d'ajouter à chaque contrainte d'inégalité supérieure une variable positive spécifique destinée à faciliter la recherche d'une solution réalisable et appelée *Variable Artificielle*.
En ajoutant les variables artificielles x_7 et x_8, le programme linéaire devient :

$$\begin{cases} \text{Max } z = -6x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{avec} \quad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 2 \\ \quad 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_8 = 6 \\ \quad -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 3 \\ \quad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots; x_8 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Première phase de la méthode du simplexe</u> :
Si l'on arrive à sortir les variables artificielles de la base, celles-ci deviendront nulle et les nouvelles variable de base seront des variables structurelles et/ou des variables d'écart ; on peut alors se débarrasser des variables artificielles dont le rôle est terminé.
Pour éjecter les variables artificielles de la base, une méthode consiste à minimiser la somme des variables artificielles sous les contraintes ci-dessus, c'est à dire résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \text{Min } z' = x_7 + x_8 \\ \text{avec} \quad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 2 \\ \quad 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_8 = 6 \\ \quad -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 3 \\ \quad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots; x_8 \geq 0 \end{cases}$$

Trois cas peuvent se produire à la fin de cette phase :

- *Les variables artificielles sont sorties de la base* : leur somme est alors nulle et la solution de base obtenue est une solution de base réalisable du problème initial.
- *La somme des variables artificielles est nulle, mais certaines restent dans la base avec un valeur nulle.* Le problème est dégénéré ; cela provient quelquefois du fait que la matrice des contraintes comporte des lignes linéairement indépendantes ou, pour parler différemment, que certaines contraintes sont redondantes ; si les lignes correspondantes du tableau du simplexe ne comportent que des coefficients nuls, on éliminera ces lignes du tableau. On dispose alors d'un programme linéaire de plus petite taille dont on dispose d'une solution réalisable de base.

- *La somme des variables artificielles n'est pas nulle à l'optimum* : on ne peut trouver de point réalisable car le polyèdre des points réalisables est vide.

Seconde phase de la méthode du simplexe :

Si l'on a obtenu grâce à la première phase une solution de base réalisable, on utilise la méthode du simplexe habituelle en partant de cette solution.

Remarque :
Lorsque l'on utilise la méthode des tableaux, il est recommandé de prévoir deux lignes pour les fonctions économiques de première et seconde phase, ce qui permet de disposer, à la fin de la première phase, des profits marginaux associés à la fonction économique de la deuxième phase ; sinon, on peut calculer les profits marginaux nécessaires à la deuxième phase en utilisant les formules classiques :

$$\Delta_N = c_N - c_B.B^{-1}.N = c_N - C_B.Y$$

où Y *n'est autre que la matrice des colonnes hors-base du tableau courant du simplexe ; pour déterminer le J*^{ème} *profit marginal, on calculera :*

$$\Delta_j = c_j - c_B.Y^j$$

où Y^j *est la j*^{ème} *colonne du tableau courant du simplexe.*

<u>Exemple</u> :
Reprenons l'exemple ci-dessus ; remarquons d'abord que pour pouvoir faire fonctionner l'algorithme du simplexe il faut que la fonction économique soit exprimée en fonction des seules variables hors-base, alors qu'elles dépendent pour le moment des variables artificielles qui ont en base. Cependant, ces variables artificielles n'apparaissent <u>que dans les contraintes d'inégalité supérieure</u> ; pour les éliminer de la fonction économique, il suffit donc de faire un changement de variable très simple, ou , encore mieux et de façon équivalente, retrancher la somme de ces contraintes de la fonction économique !
D'autre part, s'il faut maximiser la fonction économique de la première phase, il est recommandé, par souci de cohérence et pour éviter des erreurs, de maximiser l'opposé de la fonction économique de la première phase (ce qui est strictement équivalent) ; pour éliminer les variables artificielles, on lui *ajoutera* la somme des contraintes comportant des variables artificielles.

Les tableaux de la première phase sont décrits dans la figure IX.1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_B
D_{II}	-6	5	6	0	0	0	0	0	0
D_I	3	0	2	-1	-1	0	0	0	8
x_7	**1**	2	1	-1	0	0	1	0	2

x_8	2	-1	1	0	-1	0	0	1	6
x_6	-1	1	2	0	0	1	0	0	3
D_{II}	0	11	12	-6	0	0	6	0	12
D_I	0	-3	-1	2	-1	0	-3	0	2
x_1	1	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_8	0	-3	-1	**2**	-1	0	-2	1	2
x_6	0	2	3	-1	0	1	1	0	4
D_{II}	0	2	9	0	-3	0	0	3	18
D_I	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	1	-1/2	1/2	0	-1/2	0	0	1/2	3
x_4	0	-3/2	-1/2	1	-1/2	0	-1	1/2	1
x_6	0	1/2	**5/2**	0	-1/2	1	0	1/2	6

Figure IX.1

On réduit le tableau aux variables structurelles et d'écart et à la fonction économique de la seconde phase et on continue les itérations dans le tableau ainsi modifié :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_B
D_I	0	1/5	0	0	-6/5	-18/5	-18/5
x_1	1	-3/5	0	0	-2/5	-1/5	9/5
x_4	0	-7/5	0	1	-3/5	1/5	11/5
x_3	0	**1/5**	1	0	-1/5	2/5	12/5
D_I	0	0	-1	0	-1	-4	-6
x_1	1	0	3	0	-1	1	9
x_4	0	0	7	1	-2	3	19
x_2	0	1	5	0	-1	2	12

IX.2. <u>Cas des contraintes d'égalité</u>

on ne peut ajouter ou retrancher de variable d'écart à une contrainte d'égalité ; aussi, dans ce cas, on se contente d'ajouter une variable artificielle à chaque contrainte de ce type et d'appliquer la méthode du simplexe en deux phases.

<u>Exemple</u> :

Soit le programme linéaire : $$\begin{cases} \text{Max } z = -8x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 \\ \text{avec} \quad x_1 + x_2 = 12 \\ \qquad x_3 + x_4 = 8 \\ \qquad x_1 + x_3 = 6 \\ \qquad x_1 \geq 0; \ldots; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

En ajoutant les variables artificielles x_5, x_6 et x_7 , on obtient :

$$\begin{cases} \text{Max } z = -8x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 \\ \text{avec} \quad x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ \quad x_3 + x_4 + x_6 = 8 \\ \quad x_1 + x_3 + x_7 = 6 \\ \quad x_1 \geq 0; \ldots; x_7 \geq 0 \end{cases}$$

La première phase de la méthode du simplexe donne :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_B
D_{II}	-8	-6	-3	-5	0	0	0	0
D_I	2	1	2	1	0	0	0	26
x_5	1	1	0	0	1	0	0	12
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_7	**1**	0	1	0	0	0	1	6
D_{II}	0	-6	5	-5	0	0	8	48
D_I	0	1	0	1	0	0	-2	14
x_5	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_1	1	0	1	0	0	0	1	6
D_{II}	0	0	-1	-5	6	0	2	84
D_I	0	0	1	1	-1	0	1	8
x_2	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_6	0	0	1	1	0	1	0	8
x_1	1	0	1	0	0	0	1	6
D_{II}	0	0	4	0	6	5	2	124
D_I	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
x_2	0	1	-1	0	1	0	-1	6
x_4	0	0	1	1	0	1	0	8
x_1	1	0	1	0	0	0	1	6

La solution de base trouvée est :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ et } x_N = [x_3] = [0];\ z = 124.$$

La deuxième phase donne le dernier tableau décrit par la figure IX.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
D_I	-4	0	0	0	100

x_2	1	1	0	0	12
x_4	-1	0	0	1	2
x_3	1	0	1	0	6

Figure IX.2

La solution optimale est donc :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ et } x_N = [x_1] = [0];\ z = \text{-}100.$$

<u>Exercice</u> :contraintes contradictoires

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ \text{avec } \quad x_1 \leq 1 \\ \quad x_1 + x_2 \geq 6 \\ \quad -x_1 + x_2 = 3 \\ \quad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En insérant les variables d'écart x_3 et x_4 et les variables artificielles x_5 et x_6, on obtient le nouveau programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ \text{avec } \quad x_1 + x_3 = 1 \\ \quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ \quad -x_1 + x_2 + x_6 = 3 \\ \quad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots; x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Appliquons la première phase du simplexe à ce problème en ne tenant pas compte de la fonction économique de la deuxième phase (cf. figure IX.3)

La première phase est terminée, mais la valeur de la fonction économique de la première phase vaut -1 et la variable artificielle x_5 n'est pas sortie de la base. Le polyèdre des points réalisables est vide car les contraintes sont contradictoires ; en effet, si l'on combine les deux dernières contraintes, on obtient $x_1 \geq \frac{3}{2}$ alors que la première contrainte impose que $x_1 \leq 1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_B
D	0	2	0	-1	0	0	9

x_3	1	0	1	0	0	0	1
x_5	1	1	0	-1	1	0	6
x_6	-1	**1**	0	0	0	1	3
D	2	0	0	-1	0	-2	3
x_3	**1**	0	1	0	0	0	1
x_5	2	0	0	-1	1	-1	3
x_2	-1	1	0	0	0	1	3
D	0	0	-2	-1	0	-2	1
x_1	1	0	1	0	0	0	1
x_5	0	0	-2	-1	1	-1	1
x_2	0	1	1	0	0	1	4

Figure IX.3

X. CAS PARTICULIERS

X.I. Solution non bornée :

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ \text{avec } \quad -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ \quad x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ \quad x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

L'application de la méthode du simplexe donne les tableaux de la figure X.1.
La solution obtenue n'est pas optimale puisqu'un des profits marginaux est positif, mais la colonne correspondante ne peut entrer dans la base car toutes ses composantes sont négatives. Dans ce cas la solution est non bornée. En effet, considérons les contraintes du dernier tableau ; elles peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \leq 2 \\ -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \leq 0 \\ -\frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 \leq 12 \end{cases}$$

On constate que si x_3 devient suffisamment grand, les contraintes sont toujours vérifiées.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B
D	1	2	0	0	0	0
x_3	-2	**1**	1	0	0	2
x_5	-1	2	0	1	0	4

x_6	1	-4	0	0	1	4
D	5	0	-2	0	0	-4
x_3	-2	1	1	0	0	2
x_5	**3**	0	-2	1	0	0
x_2	-7	0	4	0	1	12
D	0	0	4/3	-5/3	0	-4
x_1	0	1	-1/3	2/3	0	2
x_5	1	0	-2/3	1/3	0	0
x_2	0	0	-2/3	7/3	1	12

Figure X.1. Solution non bornée

X.2. Dégénérescence primale, cyclage :

Lorsqu'au moins 2 composantes de la solution de base sont nulles, le pivotage a de forte chances de s'effectuer sur une ligne correspondant à l'une de celles-ci. La variable entrant dans la base sera alors nulle et la fonction économique ne sera pas améliorée. Dans ce cas, le nombre d'itérations de la méthode peut augmenter dans de fortes proportions ce qui ralentit considérablement sa progression puisque l'amélioration stricte de la fonction ne se fait pas. On peut même ne pas obtenir de convergence en raison d'un bouclage du cycle itératif appelé *cyclage.*
L'un des cas de cyclage les plus connus est l'exemple de Beale :

$$\begin{cases} \text{Max } z = \frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4 \\ \text{avec} \quad \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ \qquad\quad \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 \leq 1 \\ \qquad x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, le sixième tableau est identique au tableau initial.

XI. PRESENTATION SOUS FORME MATRICIELLE DE LA METHODE DU SIMPLEXE

XI.1. Rappels

Nous avons vu dans le paragraphe VII.2. que la valeur de l solution de base est donne par :

$$\mathbf{\bar{x}_B = B^{-1}.b}$$

On peut en déduire que $\bar{x}_B$ est solution du système linéaire :

$$\boxed{B.\bar{x}_B = b}$$

De même la formule de calcul des profits marginaux est :

$$\boxed{\Delta_j = c_j - c_B.B^{-1}A^j, \quad \forall j \in \{1,\ 2,\ldots,n\}}$$

Définition 18 :

> On appelle vecteur des multiplicateurs du simplexe le vecteur ligne défini par :
> $$\pi = c_B.B^{-1}$$

On en déduit que π est solution du système :

$$\boxed{\pi.B = c_B}$$

et que les profits marginaux peuvent s'écrire :

$$\boxed{\Delta_j = c_j - \pi.A^j \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}}$$

Pour pouvoir effectuer le pivotage, il faut connaître la $e^{\text{ème}}$ colonne du tableau du simplexe qui n'est autre que Y^e. Or la matrice Y est définie par :

$$Y = B^{-1}.N$$

Où N est la matrice des colonnes hors-base de A. Comme la colonne ($\in$ N) entrant dans la base est A^e, on a :

$$Y^e = B^{-1}.A^e$$

On en déduit que Y^e est solution du système linéaire :

$$\boxed{B.Y^e = A^e}$$

Remarque :

Lorsqu'on résoud un programme linéaire par la méthode du simplexe, on calcule tous les coefficients d'un tableau à m+1 lignes et n+1 colonnes :

		D_e	D_N	0 ...	...	...	0	
Num. Var. Base		$\mathbf{Y^e}$		1	1	1	1	x_B

				1	

Les seuls coefficients qu'il est utile de calculer sont ceux qui apparaissent en plus foncé dans le tableau ci-dessus, soit n+m nombres réels. alors que, dans la méthode des tableaux, on en calcule (m+1)(n-m+1) !
Les formules ci-dessus montrent, de plus, que :

Tous ces coefficients peuvent être calculés à l'aide des données initiales et des indices des variables de base

Nous allons tenir compte de cette remarque pour élaborer une nouvelle méthode où l'on ne calcule que l'information nécessaire à l'implémentation de la méthode du simplexe : la formulation matricielle de l'algorithme ou **Méthode Révisée du Simplexe.**

ALGORITHME MATRICIEL

Pas 0 :

Définition de la matrice de base initiale $B^{(0)}$.

Pas 1 :

Calcul de la solution de base $x_{B^{(k)}}$ par résolution du système linéaire :

$$B^{(k)}.x_{B^{(k)}} = b$$

Pas 2 :

Calcul du vecteur $\pi^{(k)}$ des multiplicateurs du simplexe n résolvant le système linéaire :

$$\pi^{(k)}.B^{(k)} = c_{B^{(k)}}$$

Pas 3 :

Calcul des profits marginaux des variables hors-base :

$$\Delta_j^{(k)} = c_j - \pi^{(k)}.A^j \quad \forall j \in J_N \text{ ensemble des variables hors-base}$$

Pas 4 :

Recherche du plus grand profit marginal $\Delta_{max} = \underset{j \in J_N}{Max}\, \Delta_j^{(k)} = \Delta_e^{(k)}$

- Si $\Delta_e^{(k)} \leq 0$, la solution de base $x_{B_{(k)}}$ est optimale
- Sinon la colonne A^e entre dans la base.

Pas 5 :

Calcul de la colonne entrante Y^e :

$$B^{(k)}.Y^e = A^e$$

Pas 6 :

Recherche de la colonne sortant de la base :

- Si $Y_i^e \leq 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}$; STOP ; la solution n'est pas bornée.
- Sinon $\dfrac{x_s^{(k)}}{Y_s^e} = \underset{i=1,\dots,m}{Min} \left\{ \dfrac{x_i^{(k)}}{Y_i^e} \,/\; Y_i^e > 0 \right\}$ où $x_i^{(k)}$ est la $i^{ème}$ composante de $x_{B^{(k)}}$. La $s^{ème}$ colonne de la base sort de celle-ci.

Pas 7 :

Constitution de la nouvelle matrice de base :

$$B^{(k)} = \left\{ A^{v_1},\dots,A^{v_{k-1}},A^{v_k},A^{v_{k+1}},\dots,A^{v_m} \right\}$$

$$B^{(k)} = \left\{ A^{v_1},\dots,A^{v_{k-1}},A^{e},A^{v_{k+1}},\dots,A^{v_m} \right\}$$

Revenir au pas 1.

XI.2. <u>Méthode Révisée du Simplexe</u>

Telle que nous l'avons présentée, la méthode matricielle exige l résolution de trois systèmes linéaires :

$$B^{(k)}.x_{B^{(k)}} = b$$

$$\pi^{(k)}.B^{(k)} = c_{B^{(k)}}$$

$$B^{(k)}.Y^e = A^e$$

Si nous utilisions une méthode de Gauss ou de Gauss-Jordan pour les résoudre , chaue itération demanderait $O(m^3)$ multiplications ; or la méthode des tableaux est en

$O(mn+m^2)$. Il est indispensable de réduire le coût de résolution d'un facteur m pour que la méthode matricielle devienne compétitive par rapport à la méthode des tableaux. Nous avons remarqué plus haut que la méthode des tableaux n'est autre qu'une méthode de Gauss-Jordan à pivots imposés par le 2ème critère de Dantzig ; on peut en déduire que pour obtenir un tableau du simplexe, il suffit de prémultiplier le précédent par une matrice d'élimination de Gauss-Jordan constituée à l'aide de la colonne entrante Y^e et du pivot imposé par le 2ème critère ; cette matrice d'élimination transforme Y^e en une colonne canonique dont le seul coéfficient non nul est 1 est est en s^{éme} position.
Pour passer du tableau $T^{(0)}$ au tableau $T^{(k)}$, il suffit de prémultiplier $T^{(0)}$ par les différentes matrices d'élimination $E_0, E_1, ..., E_{k-1}$:

$$T^{(k)} = E_{k-1}.E_{k-2}....E_1.E_0.T^{(0)}$$

Mais on peut aussi passer directement du tableau $T^{(0)}$ au tableau $T^{(k)}$ en prémultipliant $T^{(0)}$ par $\left[B^{(k)}\right]^{-1}$, c'est à dire :

$$T^{(k)} = \left[B^{(k)}\right]^{-1}.T^{(0)}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\left[B^{(k)}\right]^{-1} = E_{k-1}.....E_1.E_0.\left[B^{(0)}\right]^{-1}}$$

$\left[B^{(0)}\right]^{-1}$ apparaît car, si la matrice de base initiale n'est pas la matrice identité, il faut multiplier le tableau initial par celle-ci pour faire apparaître la solution de base initiale. En remarquant que $\left[B^{(k-1)}\right]^{-1} = E_{k-2}.....E_1.E_0.\left[B^{(0)}\right]^{-1}$ on fait apparaître l'importante relation suivante :

$$\boxed{\left[B^{(k)}\right]^{-1} = E_{k-1}.\left[B^{(k-1)}\right]^{-1}}$$

Propriété fondamentale :

> **L'inverse de la matrice de base d'une itération est obtenue en prémultipliant l'inverse de la matrice de base de l'itération précédente par la matrice d'élimination de Gauss-Jordan constituée à l'aide de la colonne entrante courante Y^e et de la position s du pivot.**

Etant donné la structure spécifique de la matrice d'élimination (matrice identité sauf la s^{ème} colonne « pleine », **le coût de calcul de la nouvelle inverse est en $O(m^2)$**.

La matrice d'élimination de Gauss-Jordan est dans ce cas :

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -Y_1^e/Y_s^e & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -Y_2^e/Y_s^e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1/Y_s^e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -Y_m^e/Y_s^e & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

La méthode révisée du simplexe suit le même canevas que la méthode matricielle et utilise les propriétés que nous venons d'énoncer pour le calcul de l'inverse de la matrice de base ; elle peut s'implémenter de deux façons :

- Sous forme **E.F.I.** (Explicit Form of Inverse) : l'inverse de la matrice de base est calculée explicitement au cours de chaque itération en utilisant la formule ci-dessus. Cette méthode n'est pas adaptée au cas des matrices de grande taille très creuses, mais peut être appliquée aux problèmes de petite taille.
- Sous forme **P.F.I.** (Product Form of Inverse) : l'inverse n'est pas calculée explicitement ; on conserve en mémoire les vecteurs Y^e et les positions s des pivots informationsuffisante pour reconstituer les matrices E_i. Dans cette méthode une partie du « creux » de la matrice de base est conservé car peu de produits scalaires sont effectués. Cette méthode est encore utilisée localement, mais les logiciels les plus récents utilisent une décomposition triangulaire de la matrice (algorithmes de Bartels et Golub, de Tomlin).

XI.3. Exemple d'utilisation de la méthode E.F.I. :

Reprenons l'exemple du paragraphe VIII.4.

$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_5 \\ \text{avec} \quad 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + x_7 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_8 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 + x_9 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

où x_6, x_7, x_8 et x_9 sont les variables d'écart.
Le tableau de données sera donc :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_B
c→	3	2	3	0	3	0	0	0	0	0
	2	0	1	2	2	1	0	0	0	7
	1	1	0	-1	1	0	1	0	0	1
	0	-1	2	2	0	0	0	1	0	2
	-1	1	-2	0	1	0	0	0	1	5

Itération initiale :

La matrice de base initiale est $B^{(0)} = \left(A^6, A^7, A^8, A^9\right) = Id = \left[B^{(0)}\right]^{-1}$.

- **Solution de base :** $x_{B^{(0)}} = \left[B^{(0)}\right]^{-1}.b = b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$
- **Multiplicateurs du simplexe :** $\pi^{(0)} = c_{B^{(0)}}\left[B^{(0)}\right]^{-1} = c_{B^{(0)}} = (0,0,0,0)$
- **Profits marginaux :** $\Delta_j^{(0)} = c_j - \pi^{(0)}.A^j = c_j$; donc
  $\Delta_1^{(0)} = 3; \Delta_2^{(0)} = 2; \Delta_3^{(0)} = 3; \Delta_4^{(0)} = 0; \Delta_5^{(0)} = 3.$
  Le plus grand profit marginal est entre autres $\Delta_1^{(0)}$.
  A^1 entre dans la base
- **Colonne entrant dans la base :** $Y^1 = \left[B^{(0)}\right]^{-1}.A^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
- **Pivotage :** Min $\left\{\frac{7}{2}, 1, *, *\right\} = 1$; donc ***s= 2.***
  A^7 sort de la base.
- **Nouvelle matrice de base :** $B^{(1)} = \left(A^6, A^1, A^8, A^9\right)$

Première itération :

$$\left[B^{(1)}\right]^{-1} = E_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Solution de base :** $x_{B^{(1)}} = \left[B^{(1)}\right]^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$
- **Multiplicateurs du simplexe :**
  $$\pi^{(1)} = c_{B^{(1)}}\left[B^{(1)}\right]^{-1} = (0,3,0,0).\left[B^{(1)}\right]^{-1} = (0,3,0,0).$$
- **Profits marginaux :** $\Delta_j^{(1)} = c_j - \pi^{(1)}.A^j$; donc
  $\Delta_2^{(1)} = -1; \Delta_3^{(1)} = 3; \Delta_4^{(1)} = 3; \Delta_5^{(1)} = 0; \Delta_7^{(1)} = -3.$
  Le plus grand profit marginal $\Delta_3^{(1)}$ est positif ; la solution n'est pas optimale ; ***A^3 entre dans la base***

- **Colonne entrant dans la base :** $Y^3 = \left[B^{(1)}\right]^{-1}.A^3 = \left[B^{(1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\-2\end{bmatrix}$
- **Pivotage :** Min $\{5,*,1,*\} = 1$; donc ***s= 3.***
  A^8 sort de la base.
- **Nouvelle matrice de base :** $B^{(2)} = \left(A^6, A^1, A^3, A^9\right)$

<u>Deuxième itération</u> :

$$\left[B^{(2)}\right]^{-1} = E_1.\left[B^{(1)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.\left[B^{(1)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

- **Solution de base :** $x_{B^{(2)}} = \left[B^{(2)}\right]^{-1}.b = \begin{bmatrix}1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\1\\2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\\1\\8\end{bmatrix}$
- **Multiplicateurs du simplexe :** $\pi^{(2)} = c_{B^{(2)}}\left[B^{(2)}\right]^{-1} = (0,3,3,0).\left[B^{(2)}\right]^{-1} = \left(0,3,\frac{3}{2},0\right)$.
- **Profits marginaux :** $\Delta_j^{(2)} = c_j - \pi^{(2)}.A^j$; donc
  $\Delta_2^{(2)} = \frac{1}{2}; \Delta_4^{(2)} = 0; \Delta_5^{(2)} = 0; \Delta_7^{(2)} = -3; \Delta_8^{(2)} = -\frac{3}{2}.$
  Le plus grand profit marginal $\Delta_2^{(2)}$ est positif ; la solution n'est pas optimale ; ***A^2 entre dans la base***
- **Colonne entrant dans la base :** $Y^2 = \left[B^{(2)}\right]^{-1}.A^2 = \left[B^{(2)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$
- **Pivotage :** Min $\{*,1,*,8\} = 1$; donc ***s= 2.*** ***A^1 sort de la base.***
- **Nouvelle matrice de base :** $B^{(3)} = \left(A^6, A^2, A^3, A^9\right)$

<u>Troisième itération</u> :

$$\left[B^{(3)}\right]^{-1} = E_2.\left[B^{(2)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\left[B^{(2)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Solution de base :** $x_{B^{(3)}} = \left[B^{(3)}\right]^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ 7 \end{bmatrix}$
- **Multiplicateurs du simplexe :** $\pi^{(3)} = c_{B^{(3)}}\left[B^{(3)}\right]^{-1} = (0,2,3,0).\left[B^{(3)}\right]^{-1} = \left(0,\frac{7}{2},\frac{3}{2},0\right)$.
- **Profits marginaux :** $\Delta_j^{(3)} = c_j - \pi^{(3)}.A^j$; donc

  $\Delta_1^{(3)} = -\frac{1}{2}; \Delta_4^{(3)} = \frac{1}{2}; \Delta_5^{(3)} = -\frac{1}{2}; \Delta_7^{(3)} = -\frac{7}{2}; \Delta_8^{(3)} = -\frac{3}{2}.$

  Le plus grand profit marginal $\Delta_4^{(3)}$ est positif ; la solution n'est pas optimale ; ***A⁴ entre dans la base***
- **Colonne entrant dans la base :** $Y^4 = \left[B^{(3)}\right]^{-1}.A^4 = \left[B^{(3)}\right]^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$
- **Pivotage :** Min $\left\{\frac{11}{3},*,3,\frac{7}{2}\right\} = 3$ donc ***s= 3.*** ***A^1 sort de la base.***

Nouvelle matrice de base : $B^{(4)} = \left(A^6, A^2, A^4, A^9\right)$

<u>*Quatrième itération*</u> *:*

$$\left[B^{(4)}\right]^{-1} = E_3.\left[B^{(3)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.\left[B^{(3)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Solution de base :** $x_{B^{(4)}} = \left[B^{(4)}\right]^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
-
- **Multiplicateurs du simplexe :** $\pi^{(4)} = c_{B^{(4)}}\left[B^{(4)}\right]^{-1} = (0,2,0,0).\left[B^{(4)}\right]^{-1} = (0,4,2,0)$.
- **Profits marginaux :** $\Delta_j^{(4)} = c_j - \pi^{(4)}.A^j$; donc

  $\Delta_1^{(4)} = -1; \Delta_3^{(4)} = -1; \Delta_5^{(4)} = -1; \Delta_7^{(4)} = -4; \Delta_8^{(3)} = -2.$

  Le plus grand profit marginal $\Delta_1^{(4)}$ est négatif ; la solution est `optimale`.